# 第 42 講　平面ベクトル(3)

**例題 42 － 1**

(1)　次の等式を証明せよ．

(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ．

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS



本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 － 1**

(1)　次の等式を証明せよ．

(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 ー 2**

次の条件を満たす２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

⑴　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

⑵　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

**【Point Pickup】**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 − 2**

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(1)　$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 ー 3**

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P

(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△ABC の重心 G

(4)　△APQ の重心 G′

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 － 3**

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P

(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　△CPQ の重心 G



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**例題 42 － 4**

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ．

(3)　PQ：QC を求めよ．

**【Point Pickup】**



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 － 4**

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$, $|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ **ア** ，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は　$\theta=$ **イウ** °，$|\vec{a}-\vec{b}|=$ **エ** 　である．

(2)　△OAB の辺 OA を 5：2 に内分する点を C，辺 OB を 5：3 に内分する点を D，△OAB の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，3 点 C，G，D が一直線上にあることを証明したい．

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\boxed{オ}}\vec{a}+\dfrac{1}{\boxed{オ}}\vec{b}$ であることから

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{21}\left(-\boxed{カ}\,\vec{a}+\boxed{キ}\,\vec{b}\right)$,

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{56}\left(-\boxed{カ}\,\vec{a}+\boxed{キ}\,\vec{b}\right)$　である．

よって　$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{CG}$　より，3 点 C，G，D は一直線上にある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 42 講　平面ベクトル(3)

**例題 42 － 1**

(1)　次の等式を証明せよ.

(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき, $2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ.

(1)　(ア)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(イ)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(ウ)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\cdot2+3^2=21$

$|2\vec{a}+\vec{b}|>0$ より　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{21}}$

**類題 42 － 1**

(1)　次の等式を証明せよ.

(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき, $2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ.

(1)　(ア)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(イ)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times(-2)+9\times3^2=121$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|>0$ より　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\mathbf{11}$

**例題 42 － 2**

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(1)　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2)　$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

(1)　$|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$　より　$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=28$　　つまり　$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$　より　$9\times2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2=28$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-1}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=\mathbf{120°}$

(2)　$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であることより

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$　　つまり　$3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$　より　$3\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-2}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=\mathbf{135°}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題42－2**

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ.

(1)　$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

(1)　$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$　より　$|2\vec{a}+5\vec{b}|^2=19$　　つまり　$4|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=19$

$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$　より　$4\times4^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25\times(\sqrt{3})^2=19$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{-6}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{4\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{150^\circ}$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であることより

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+6\vec{b})=0$　　つまり　$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$　より　$3^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times2^2=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{3}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{60^\circ}$

**例題42－3**

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

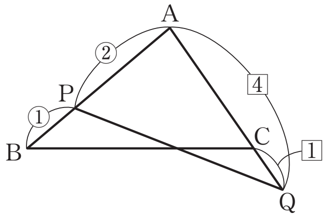
(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P

(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△ABC の重心 G

(4)　△APQ の重心 G′

$P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $G(\vec{g})$, $G'(\vec{g'})$ とする.




(1)　$\vec{p}=\dfrac{1\times\vec{a}+2\times\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}}$

(3)　辺 BC の中点を $M(\vec{m})$ とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

よって

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+2\vec{m}}{2+1}=\frac{1}{3}\left\{\vec{a}+2\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\right\}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$$

(4)　$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}}$

©RECRUIT HOLDINGS

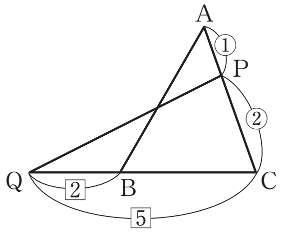
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**類題 42 ー 3**

3点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P　　(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　△CPQ の重心 G




P($\vec{p}$)，Q($\vec{q}$)，G($\vec{g}$) とする.

(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{1+2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{5\vec{b}-2\vec{c}}{-2+5}=\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{c}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}}$

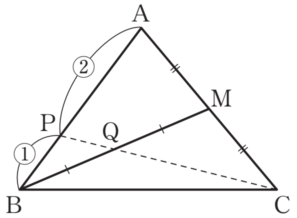
**例題 42 ー 4**

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ.

(2)　3点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ.

(3)　PQ：QC を求めよ.




(1)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{b}}$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ より

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\dfrac{2}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{12}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PQ}$ より，3点 P，Q，C は一直線上にある.

(3)　(2)より　PQ：QC＝**1：3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

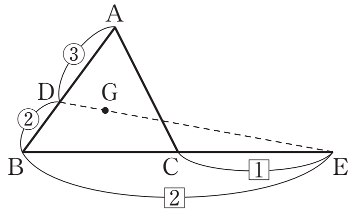
**類題 42 ー 4**

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 BC の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ．




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2-1}=\boldsymbol{-\vec{b}+2\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{4}{15}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{8}{5}\vec{b}+2\vec{c}=\dfrac{2}{5}(-4\vec{b}+5\vec{c})=\dfrac{6}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=6\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ より，3 点 D，G，E は一直線上にある．

DG：GE＝**1：5**

# 第42講　平面ベクトル(3)

(1)　2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 $\theta$ は　$\theta=$ [イウ]°，$|\vec{a}-\vec{b}|=$ [エ]　である．

(2)　△OABの辺OAを5：2に内分する点をC，辺OBを5：3に内分する点をD，△OABの重心をGとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，3点C，G，Dが一直線上にあることを証明したい．

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{[オ]}\vec{a}+\dfrac{1}{[オ]}\vec{b}$ であることから

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{21}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$,

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{56}(-[カ]\vec{a}+[キ]\vec{b})$　である．

よって　$\overrightarrow{CD}=\dfrac{[クケ]}{[コ]}\overrightarrow{CG}$　より，3点C，G，Dは一直線上にある．

**解答例**

(1)　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$　より　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=13$　つまり　$9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ より　$9\times(\sqrt{3})^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=13$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times 2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{30}^\circ$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(\sqrt{3})^2-2\times3+2^2=1$

$|\vec{a}-\vec{b}|>0$　より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\mathbf{1}$

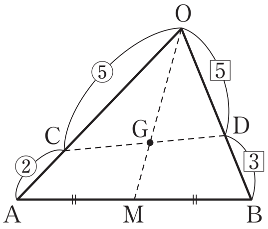
(2)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)-\dfrac{5}{7}\vec{a}=-\dfrac{8}{21}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{21}(-\mathbf{8}\vec{a}+\mathbf{7}\vec{b})$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{8}\vec{b}-\dfrac{5}{7}\vec{a}=\dfrac{5}{56}(-8\vec{a}+7\vec{b})$

$\dfrac{5}{56}\div\dfrac{1}{21}=\dfrac{5}{56}\times21=\dfrac{15}{8}$ より　　$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}\overrightarrow{CG}$

したがって　3点C，G，Dは一直線上にある．




ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。